Matematyka i przyroda w kształceniu powszechnym,
PWSZ Nowy Sacz 2011, 139-146

Eulerova formula, Platonovské mnohosteny a lopty

Najskôr trochu teórie o konvexných mnohostenoch a ich grafoch. V práci podstatným spôsobom budeme využívať dve vety, ktoré ktorá vyjadrujú súvis medzi kombinatorickými a metrickými vlastnosťami mnohostenov. V roku 1927 bola uverejnená Steinitzova veta: Ak G je planárny vrcholovo 3-súvislý graf (t.j. vynechaním dvoch ľubovoľných vrcholov a hrán, s ktorými incidujú, ostane súvislým grafom), tak existuje konvexný mnohosten s rovnakými typmi stien a vrcholov.

Budeme vravieť, že graf a príslušný mnohosten sú kombinatoricky izomorfné. Neskôr bola publikovaná Maniho veta podľa ktorej navyše platí, že existuje kombinatoriky izomorfný mnohosten, ktorý má grupu symetrii izomorfnú s grupou automorfizmov príslušného polyedrického grafu.

Tieto vety nám umožňujú to, že namiesto popisu mnohostenov s uvádzanými vlastnosťami, stačí zostrojiť príslušné obrázky. Na loptu sa budeme dívať ako na konvexný mnohosten.

Ak vnoríme súvislý planárny graf do roviny, tak tento graf rozdelí rovinu na súvislé oblasti. Oblasť ohraničenú k-hranami budeme nazývať *k-uholník* a vrchol, z ktorého vychádza k hrán budeme nazývať *k-valentný vrchol.*

Ak postupne označíme symbolmi s, h, v počet stien, počet hrán a vrcholov konvexného mnohostena, tak pre tieto symboly platí známa Eulerova formula

$$s - h + v = 2.$$

Ak označíme symbolmi s_k a v_k počet k-uholníkov a k-valentných vrcholov (vrcholov k-teho stupňa), tak platí

$$s = \sum_{3\leq k} s_k,\ v = \sum_{3\leq k} v_k \quad \text{a} \quad 2h = \sum_{3\leq k} ks_k = \sum_{3\leq k} kv_k.$$

Po vynásobení Eulerovej formuly šiestimi a dosadení z týchto vzťahov dostaneme

$$(6s - 2h) + 2(3v - 2h) = 12,$$
$$6\sum_{3\leq k} s_i - \sum_{3\leq k} ks_k + 2(\sum_{3\leq k} 3v_k - \sum_{3\leq k} kv_k) = 12,$$

$$\sum_{3\le k}(6-k)s_k + 2\sum_{3\le k}(3-k)v_k = 12. \quad (*)$$

Podobným spôsobom môžeme odvodiť vzťah

$$\sum_{3\le k}(4-k)(s_k+v_k) = 8. \quad (**)$$

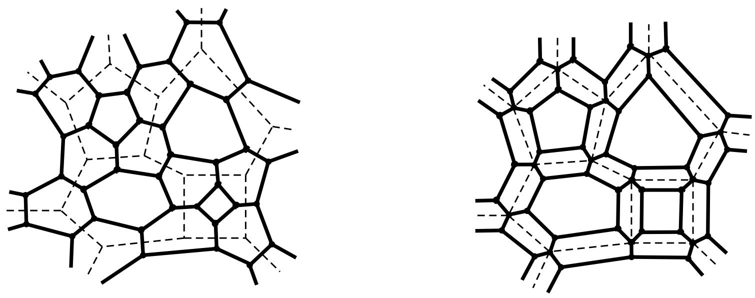
Posledné dva vzťahy sú nutnými podmienkami pre existenciu konvexného mnohostena. (Všimnite si, prvý vzťah neobmedzuje počet 6-uholníkov a 3-valentných vrcholov a druhý prvky 4.stupňa.) Z týchto podmienok vyplývajú vzťahy

$$3s_3 + 2s_4 + s_5 \ge 12 \quad \text{a} \quad s_3 + v_3 \ge 8.$$

Z týchto dvoch vzťahov vyplýva, že každý pravidelný mnohosten (mnohosten, ktorý má všetky steny a hrany rovnakého typu) môže sa skladať len zo stien a vrcholov stupňa najviac 5. Navyše, ak nie je vytvorený z trojuholníkov, tak jeho vrcholy musia byť 3-valentné. Z uvedených vzťahov bezprostredne vyplývajú nutné podmienky pre existenciu pravidelných konvexných mnohostenov. Existuje práve 5 pravidelných konvexných mnohostenov - štvorsten, kocka, osemsten, dvanásťsten, dvadsaťsten (tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron, icosahedron).

Kombinatorické štruktúry lôpt.

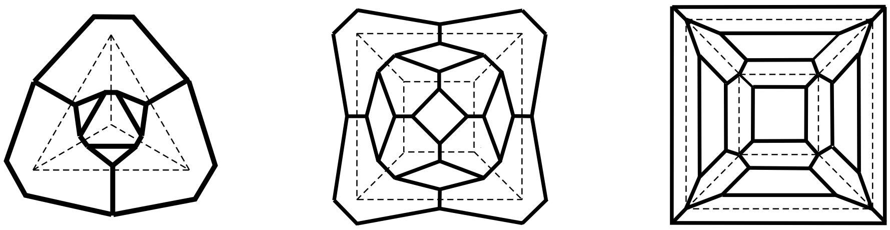
V posledných 30-tich rokoch minulého storočia sa používala lopta, ktorá sa skladá len z päťuholníkov, šesťuholníkov a všetky vrcholy sú 3-valentné. Z uvedeného bezprostredne vyplýva, že takáto sa musí skladať z práve 12 päťuholníkov a počet šesťuholníkov nie je ňou obmedzený. Pretože podmienka je nutná, ale nie postačujúca, pre počty stien môžeme sa pýtať na to, koľko môže mať lopta šesťuholníkov. Z prác publikovaných v druhej polovici minulého storočia vyplýva, že počet šesťuholníkov môže byť ľubovoľný, okrem jedného (pozri [2], str. 61.)



Obrázok 1: Dve transformácie

Ak lopta vznikla z pravidelného mnohostena, tak sú počty k-uholníkov sú násobkami počtu stien, resp. počtu vrcholov východzieho mnohostena. Pretože uvažujeme len konštrukčné kroky, ktoré zachovávajú všetky roviny súmernosti sú aj ich grupy symetrií rovnaké.

Ak máme daný rovinný graf mnohostena (na obrázku 1 sú pôvodné grafy nakreslené prerušovanými čiarami), tak z nech môžeme vytvoriť nový graf, ktorý bude obsahovať rovnaký počet k-uholníkov a nové šesťuholníky. Na obrázku 1 sú nakreslené dve transformácie, ktorými môžeme vytvoriť nové grafy (nakreslené hrubými čiarami.) Na prvom sú nahradené všetky vrcholy pôvodného grafu šesťuholníkmi a na druhom všetky hrany 6-uholníkmi, pričom všetky vrcholy nových grafov sú stupňa 3.



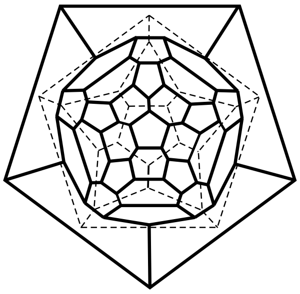
Obrázok 2: Dodecaeder

Na obrázku 2 (vľavo) je nakreslená transformácia, pomocou ktorej vznikne zo štvorstena mnohosten kombinatoricky izomorfný (majúci rovnaké počty a typy stien) s futbalovou loptou Jabulani. Na tomto obrázku vpravo sú lopty, ktoré vznikli z kocky použitím uvedených transformácií. Vpravo je lopta, ktorá je kombinatoricky izomorfná s loptou, ktorú používajú vo volejbale.

Vráťme sa ku štruktúre "klasickej" futbalovej lopty - táto vznikla z 12-stena a kocky tak, že všetky vrcholy sa nahradili šesťuholníkmi (obr.3). Pretože 12-sten má 20 vrcholov futbalová lopta sa skladá z práve 12 päťuholníkov a 20 šesťuholníkov. Uvedený postup náhrady vrcholov stenami môžeme zopakovať aj na grafe lopty a získame loptu z 12 päťuholníkov a 70 šesťuholníkov. Opakovaním týchto transformácií dostaneme mnohosten s veľkým počtom šesťuholníkov a práve 12 päťuholníkmi. (Poznámka: Futbalovú loptu dostaneme aj z 20-stena "odrezaním" všetkých vrcholov.)

Použitím druhej transformácie (na obr. 2 vpravo) vznikne z dvanásťstena lopta, ktorá sa skladá z 12 päťuholníkov a 30 šesťuholníkov. Namiesto vrcholov sme 6-uholníkmi "nahradili" hrany 12-stena. Vychádzajúc z kocky dostaneme volejbalovú loptu. (Poznámka: Volejbalovú loptu dostaneme aj z 8-stena "odrezaním" všetkých vrcholov.) V dvadsiatych rokoch minulého storočia sa používali takéto lopty aj vo futbale.

Až do konca minulého storočia plášť lopty bol zošitý z kúskov kože.

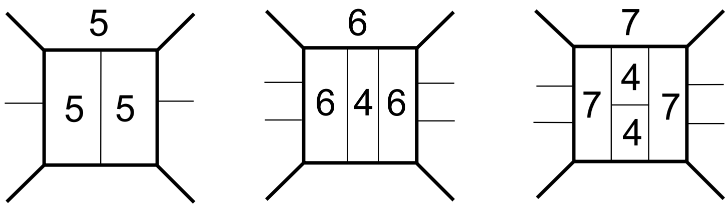


Obrázok 3: Futbalová lopta

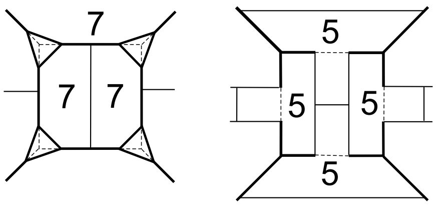
Z praktických dôvodov sú v jednom mieste zošité najviac tri kúsky kože.

Prvé futbalové lopty z 19-teho storočia boli vytvorené dvojuholníkov, ktoré boli zošité v dvoch vrcholoch. (Takúto štruktúru majú dnes lopty, ktoré sa používajú v rugby.) V spoločných vrcholoch všetkých dvojuholníkov mala lopta iné fyzikálne vlastnosti (bola tvrdšia.) Neskôr boli všetky ostatné lopty boli ušité tak, aby sa v jednom mieste spájali len tri kúsky kože. Toto viedlo k tomu, že lopty boli vytvárane z dvoch 8-uholníkov a 8 štvoruholníkov, prípadne iných n-bokých hranolov. Tieto lopty boli kombinatoricky izomorfné s n-bokým hranolom pre $n = 8, 12$.

Neskôr sa používali lopty, ktoré vzniknú z kocky štyrmi rôznymi spôsobmi (pozri obrázok 4, kde hrubými čiarami je nakreslená jedna stena kocky a časti susediacich hrán):



Obrázok 4: Konštrukcie



Obrázok 5: Konštrukcie

1. Na každej hrane zvolíme nový vrchol a tieto vrcholy spojíme šiestimi hranami tak, aby z jedného štvorca vznikli dva 5-uholníky. Takáto lopta je kombinatoricky izomorfná s 12-stenom.

1a. Firma Adidas vyrobila futbalovú loptu GrassrootsProgramme, ktorá sa skladá zo 4 trojuholníkov a 12 sedem uholníkov. Príslušný mnohosten dostaneme tak, že nahradíme všetky vrcholy východnej kocky trojuholníkmi.

2. Na každej hrane zvolíme dva nové vrcholy a tieto spojíme dvanástimi hranami tak, aby z jedného štvorca vznikli jeden štvoruholník a dva 6-uholníky. Takáto lopta je kombinatoricky izomorfná mnohostenu, ktorý vznikne z kocky použitím druhej transformácie, ktorá je na obrázku 2 vpravo.

3. Vychádzajme z mnohostena z predchádzajúceho prípadu. Na každej novopridanej hrane zvolíme nový vrchol a tieto po dvojiciach spojíme novými hranami. (Do každej steny kocky "vložíme" písmeno H.) Takto vznikne mnohosten, ktorý sa skladá z 24 stien, ktoré sú 7-uholníky a 4-uholníky.

4. V mnohostene z bodu 3. je 12 vrcholov incidujúcich so štvoruholníkom a dvoma 7-uholníkmi. Ak vynecháme 6 hrán, ktoré s nimi incidujú dostaneme mnohosten, ktorý je kombinatoricky izomorfný s 12-stenom. Geometricky je to mnohosten skladajúci sa z 12 stien, ktoré majú tvar písmena T. Takéto lopty sa používali v tridsiatych rokoch. (Pre úplnosť uvedieme, že ventil bol umiestnený v jednom štvoruholníku a teda dva susedné päťuholníky sa zmenili na 6-uholníky.)

Ak vyššieuvedené úpravy urobme tak, aby sa zachovali všetky roviny podľa ktorých je súmerná kocha, tak dostaneme mnohosteny (a teda aj lopty) s rovnakou grupou symetrií ako má kocka.

Začiatkom tohto storočia sa začali robiť futbal lopty s povrchom zo syntetických materiálov a toto umožňuje vytváranie lôpt s rôznymi kombinatorickými štruktúrami. Základ tvorila kožená lopta, na ktorú sa nalepili rôzne tvarované diely. Cieľom bolo vytvoriť loptu, ktorá by zachovávala tvar a hmotnosť, nenasakovala vodou, mala vhodné letové vlastnosti a pod.

Na majstrovstvách sveta vo futbale v roku 2006 sa používala lopta Tango (alebo Teamgeist), ktorá sa skladala zo "6 piškót". Jednotlivé "piškóty" sú štvoruholníky a ostatné steny šesťuholníky. Táto lopta je kombinatoricky izomorfná s volejbalovou loptou (plné čiary na obrázku 2 vpravo). Na majstrovstvách sveta vo futbale v roku 2010 sa používala lopta Jabulani, ktorá je (zdánlivo) kombinatoricky izomorfná s grafom štvorstena, v ktorom sú všetky (pozri obr. 3 vľavo) vrcholy nahradené 6-uholníkmi. Pri pozornom pohľade si môžete všimnúť, že každý 6-uholník je doplnený troma hranami tak, že z neho vznikne 6-uholník a tri štvoruholníky. Doplnené hrany vytvárajú z trojuholníkov 9-uholníky.

Grupy symetrií pravidelných mnohostenov.

Doposiaľ sme sa zaoberali len kombinatorickými vlastnosťami mnohostenov. V ďalšej časti sa budeme zaoberať grupami symetrií pravidelných mnohostenov.

Najskôr si všimnime súvis medzi kockou a osemstenom. Stredu každej steny kocky priradíme nový vrchol. Ak z kocky odrežeme 6 štvorstenov, ktoré sú určené trojicami nových vrcholo priradených stenám so spoločným vrcholom a týmto spoločným vrcholom, tak dostaneme osemsten. Z toho vyplýva, že kocka je súmerná podľa tých istých rovín ako osemsten. (Tento osemsten je to konvexný obal šiestich nových vrcholov.) Rovnakým spôsobom môžeme z osemstena vytvoriť kocku.

Všeobecne je známe, že kocka je súmerná podľa 9 rovín. Tri roviny sú určené stredmi hrán a ďalších šesť dvojicami "protiľahlých" hrán. Roviny súmernosti kocky rozdeľujú jej povrch na 48 elementárnych trojuholníkov. Tieto trojuholníky môžeme rozdeliť do dvoch skupín tak, že žiadne dva trojuholníky jednej skupiny nemajú spoločnú hranu.

Pretože pre každú dvojicu elementárnych trojuholníkov existuje práve jedna zhodnosť, ktorá prevedie prvý do druhého existuje práve 48 zhodností, ktoré zobrazujú kocku na seba (tzv. symetrií kocky). Dvoma trojuholníkmi z jednej skupiny je určená súhlasná zhodnosť, preto je 24 súhlasných a rovnaký počet nesúhlasných zhodností. (Dva nesúhlasne zhodné útvary však nemôžeme stotožniť v 3-rozmernom priestore.) Pretože pri každom zobrazení kocky do seba stred kocky je samodružný bod existuje 24 otáčaní (včítaní identity), ktoré zobrazujú kocku do seba. Zhodnosti, ktoré reprodukujú kocku, s operáciou skladanie zobrazení tvoria tzv. grupu symetrií kocky.) Pretože kocka aj osemsten sú súmerné podľa tých istých rovín sú grupy symetrií kocky a osemstena totožné.

Podobne, ako z kocky môžeme vytvoriť osemsten, môžeme z dvanásťstena vytvoriť 20-sten a obrátene. Pravidelný dvanásťsten má 15 rovín súmerností, ktoré sú určené dvojicami "protiľahlých" hrán. Ak povrch dvanásťstena rozdelíme prienikmi týchto rovín s jeho povrchom, tak tento sa rozpadne na 120 elementárnych trojuholníkov. Pretože pre každú dvojicu trojuholníkov existuje práve jedna zhodnosť, ktorá prevedie prvý do druhého existuje práve 120 symetrií dvanásťstena. Z týchto je 60 súhlasných a rovnaký počet nesúhlasných zhodností.

Pretože štvorsten je súmerný podľa štyroch rovín existuje 24 zhodností, ktoré ho zobrazujú na seba. Z týchto je 12 súhlasných a rovnaký počet nesúhlasných zhodností. Pravidelné mnohosteny majú tri rôzne grupy symetrií. Evidentne, ak z pravidelného mnohostena vytvoríme nový mnohosten, ktorý má rovnaký počet rovín súmernosti, tak oba majú tú istú grupu symetrií.

Tieto fakty môžeme využiť pri riešení niekoľkých úloh.

Niekoľko úloh.

Úloha 1: Koľko navzájom neizomorfných obodkovaní má hracia kocka, ktorej stenám sú priradené počty bodiek od 1 do 6? Ako sa toto číslo zmení, ak budeme požadovať, aby súčty bodiek na nesusediacich štvoruholníkoch boli rovnaké?

Ak by kocka bola pevne prichytená k podložke, tak počet očíslovaní by bol rovný počtu permutácií 6-prvkovej množiny, t.j. 6!. Pretože existuje 24 súhlasných zhodností, ktoré zobrazujú kocku na seba, medzi 6! očíslovanými kockami sú skupiny po 24 kociek, ktoré majú po vhodnom otočení rovnaké očíslovanie. Počet navzájom neizomorfných očíslovaní futbalovej lopty je $\frac{6!}{24}$. Hracie kocky, ktoré používame v spoločenských hrách sú bodkované tak, aby súčet bodiek na protiľahlých hranách bol sedem existujú len dve navzájom neizomorfne obodkované kocky, ktoré sú rovinovo súmerné. Ak si hraciu kocku postavíme tak, že na prednej stene je jedna bodka a na hornej dve, tak na zadnej je ich šesť a dolnej stene päť bodiek. Voľbu máme len na pravej a ľavej stene, ktoré majú tri, resp. štyri bodky.

Úloha 2: Koľko navzájom neizomorfných obodkovaní môže mať hracia kocka, ktorá má tvar osemstena a stenám sú priradené počty bodiek od 1 do 8? Ako sa toto číslo zmení, ak budeme požadovať, aby súčty bodiek na nesusediacich trojuholníkov boli rovnaké?

Úloha 3: Ak päťuholníky klasickej futbalovej lopty postupne označíme číslami $1, 2, ..., 11, 12$, tak koľko navzájom rôznych (neizomorfných) označení futbalovej lopty existuje?

Ak by lopta bola pevne prichytená k podložke, tak počet očíslovaní by bol rovný počtu permutácií 12-prvkovej množiny, t.j. 12!. Pretože existuje 60 súhlasných zhodností, ktoré zobrazujú 12-sten (a teda aj loptu) na seba, medzi 12! očíslovanými loptami sú skupiny po 60 lôpt, ktoré majú po vhodnom otočení rovnaké očíslovanie. Počet navzájom neizomorfných očíslovaní futbalovej lopty je $\frac{12!}{60}$.

Úloha 4. Koľkými spôsobmi môžeme troma rôznymi farbami ofarbiť loptu Jabulany "trojuholníky", aby tieto mali rôzne farby a šesťuholníky boli biele.

Ak požadujeme, aby žiadne dva trojuholníky nemali rovnakú farbu tak je to $\frac{4!}{12}$, t.j. dvoma spôsobmi. Existuje viacero výkladov zadania úlohy a preto existuje aj viacero riešení.

Úloha 5. Lopta je vytvorená z trojuholníkov a päťuholníkov, pričom každy vrchol je vrcholom štyroch stien. Z koľkých trojuholníkov a päťuholníkov sa táto lopta skladá?

Počty (20 a 12) stien vyplývajú z vyššiuvedeného dôsledku Eulerovej vety.

Všimnite si, ako sú "klasické" futbalová lopty vymaľované. Zvyčajne sa vychádza zo štruktúry stien. Niektoré lopty vytvorené z 5-uhoníkov a 6-uholníkov majú na mieste päťuholníkov päťcípe hviezdy, na iných sú vymaľované šesťuholníky rôznymi ornamentami, prípadne namiesto šesťuholníkov sú trojuholníky (v tomto prípade každé dva trojuholníky sa "stretávajú" vo vrcholoch stupňa štyri.) Avšak vždy tam nájdeme prvky dvoch typov 12 vychádzajúcich z päťuholníkov a 20 vychádzajúcich zo šesťuholníkov.

Pozorný čitateľ si môže položiť podobné otázky aj o loptách, ktoré by boli zložené zo stien iných typov.

Záverom uvedieme tri poznámky:

1. V škole sa študenti učia, že uhlík sa nachádza v prírode v tvare sadze alebo diamantu. V roku 1985 pribudla k dovtedy známym modifikáciám uhlíka ďalšia, ktorá je tvorená skupinou diskrétnych molekúl nazývaných fullereny. Ich štruktúra je rovnaká ako kombinatorická štruktúra futbalovej lopty vytvorenej zo 5-uholníkov a 6-uholníkov. Bol to tak významný objav, že s relatívne krátkym odstupom času bola zaň udelená Nobelova cena za chémiu. Podelili sa o ňu dvaja americkí profesori Robert F.Curl, Richard E.Smalley a Angličan profesor Harold W. Kroto. Pomenovanie fullereny má pôvod v tvaroch geodetických dómov, ktoré navrhoval americký architekt Richard Fuller, ktoré boli skonštruované pri príležitosti svetovej výstavy v Montreale v roku 1967.

2.Zaujímavú kombinatorickú štruktúru má klasická (oranžová) basketbalová lopta. Pretože je vytvorená z plastu nie je nutné rešpektovať fakt, že v každom vrchole sa stretávajú tri steny. Všetky vrcholy sú 4-stupňa a všetky steny sú trojuholníky. Z Eulerovej vety vyplýva, že jej povrch sa skladá z 8 trojuholníkov a 6 vrcholov. Pretože jednotlivé steny nie sú to rovnostranné trojuholníky, grupa symetrií basketbalovej lopty má len 4 symetrií (dve rovinové súmernosti, osová súmernosť a identita) a je podgrupou grupy symetrií osemstena.

3. Ak si pozorne pozriete kombinatorickú štruktúru oficiálnych futbalových lôpt, ktoré sa používali na majstrovstvách sveta v rokoch 2002, 2006 a 2010, tak môžete konštatovať, že ich grupy symetrií boli postupne grupami symetrií dvanásťstena, kocky a štvorstena.

Address: Catholic University, Hrabovská 1, 034 01 Ružomberok, Slovakia
e-mail:marian.trenkler@ku.sk